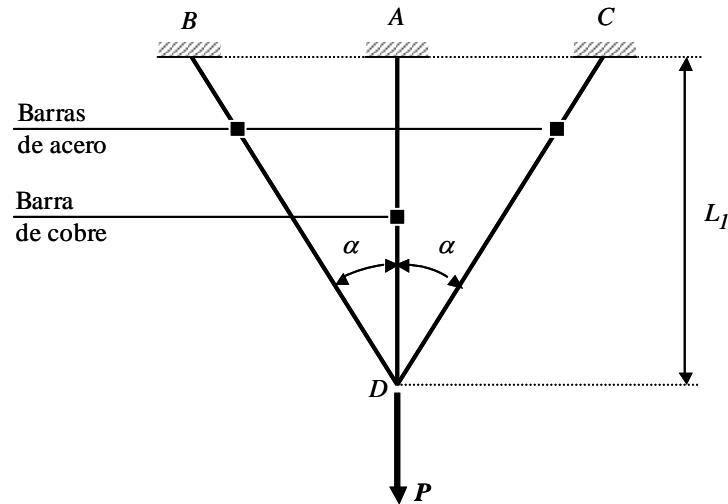


Ejercicio N° 10 - Enunciado

Dada la estructura que se observa en la figura 10.1, sometida a una carga P que actúa en el nudo D , y donde las barras inclinadas fueron construidas en acero y la vertical en cobre, de acuerdo con los datos que se indican en la tabla 10.1:

**Figura 10.1**

L_1	α	F_c	F_a	E_c	E_a	P
m	$^\circ$	cm^2	cm^2	kN/cm^2	kN/cm^2	kN
1,45	32	3,80	1,27	$12 \cdot 10^3$	$21 \cdot 10^3$	35

L_1 : Longitud de la barra vertical de cobre

$F_c = F_1$: Área de la sección transversal de la barras de cobre

$F_a = F_2 = F_3$: Áreas de las secciones transversales de las barras de acero

$E_c ; E_a$: Módulos de elasticidad longitudinal de las barra de cobre y acero, respectivamente

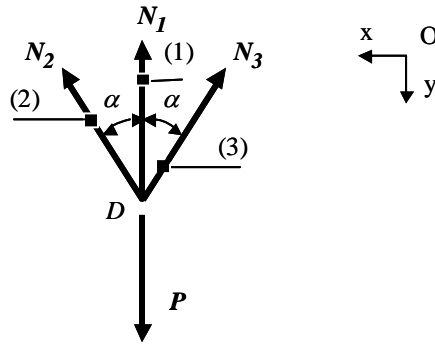
Tabla 10.1

Se solicita determinar:

1. Los esfuerzos en dichas barras
2. Las tensiones que se generan en las mismas
3. El desplazamiento vertical que experimenta el punto D .

Ejercicio N° 10- Resolución**1. Cálculo de los esfuerzos en las barras**

Para observar los mismos, se muestra en la figura 10.2 el diagrama de cuerpo libre en el punto D :



$N_1 = N_{DA}$: Esfuerzo en la barra (1)

$N_2 = N_{DB}$: Esfuerzo en la barra (2)

$N_3 = N_{DC}$: Esfuerzo en la barra (3)

Figura 10.2

Las dos ecuaciones de equilibrio que puede plantear la estática son:

$$\sum_i P_{iy} = 0$$

$$P - 2 \cdot N_2 \cdot \cos(\alpha) - N_1 = 0 \quad (1)$$

$$\sum_i P_{ix} = 0$$

$$N_2 \cdot \sin(\alpha) - N_3 \cdot \sin(\alpha) = 0 \quad (2)$$

De esta última ecuación, y atendiendo a la simetría del sistema, surge que:

$$N_2 = N_3 \quad (3)$$

Teniendo en cuenta que la estática puede plantear sólo dos ecuaciones, y que el presente problema posee 3 (tres) incógnitas, se tiene un sistema estáticamente indeterminado.

En consecuencia, deben analizarse las deformaciones que experimenta el mismo para poder resolverlo. Al respecto, es fácil deducir que ante la acción de la carga P actuando en el nudo D , las barras se deforman según se observa en la figura 10.3:

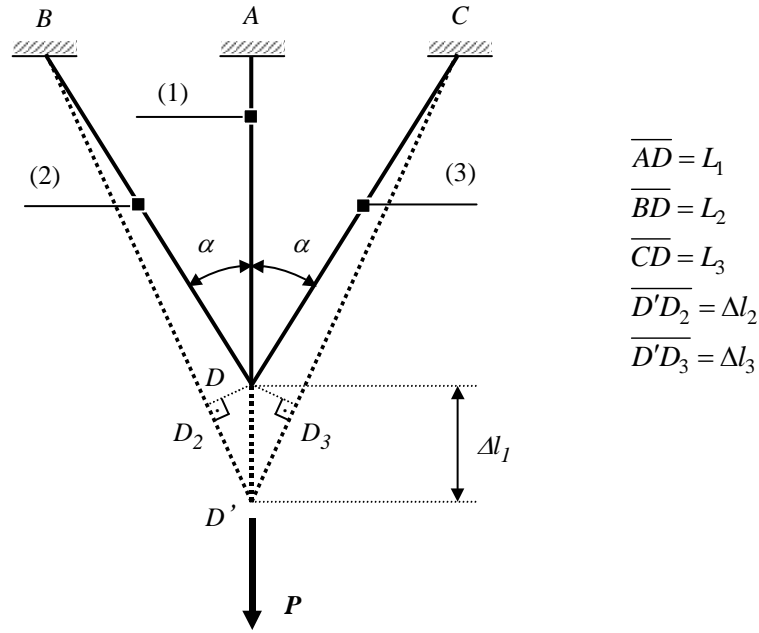


Figura 10.3

Además, en el campo de las pequeñas deformaciones, y por sufrir el ángulo α una variación muy pequeña, puede considerarse que el mismo se mantiene constante.

En dichas condiciones, puede observarse que los alargamientos de las barras inclinadas Δl_2 y Δl_3 están relacionados con los de la barra vertical Δl_1 a través de del ángulo α . Es decir,

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l_1 \cdot \cos(\alpha) \quad (4)$$

Por otro lado:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot L_1}{E_c \cdot F_c} \quad (5)$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot L_2}{E_a \cdot F_a} \quad (6)$$

Reemplazando (6) en (4):

$$\Delta l_1 = \frac{N_2 \cdot L_2}{E_a \cdot F_a \cdot \cos(\alpha)} \quad (7)$$

Igualando (5) y (7):

$$\frac{N_1 \cdot L_1}{E_c \cdot F_c} = \frac{N_2 \cdot L_2}{E_a \cdot F_a \cdot \cos(\alpha)} \quad (8)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (8) constituyen un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (N_1 , N_2 y N_3). De la expresión (8):

$$N_2 = \frac{N_1 \cdot L_1}{E_c \cdot F_c} \cdot \frac{E_a \cdot F_a \cdot \cos(\alpha)}{L_2}$$

Cátedra: Ing. José Luis Tavorro	TP 1	10/4
---------------------------------	------	------

Siendo:

$$L_1 = L_2 \cdot \cos(\alpha)$$

En consecuencia,

$$N_2 = N_1 \cdot \frac{E_a \cdot F_a}{E_c \cdot F_c} \cdot \cos^2(\alpha) \quad (9)$$

Reemplazando (9) en (1):

$$P - 2 \cdot \frac{N_1 \cdot E_a \cdot F_a}{E_c \cdot F_c} \cdot \cos^3(\alpha) - N_1 = 0$$

$$P - N_1 \left[\frac{2 \cdot E_a \cdot F_a}{E_c \cdot F_c} \cdot \cos^3(\alpha) + 1 \right] = 0$$

Finalmente,

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \cdot \frac{E_a \cdot F_a}{E_c \cdot F_c} \cdot \cos^3(\alpha)} \quad (10)$$

Reemplazando (10) en (9):

$$N_2 = \left[\frac{P}{1 + 2 \cdot \frac{E_a \cdot F_a}{E_c \cdot F_c} \cdot \cos^3(\alpha)} \right] \cdot \frac{E_a \cdot F_a}{E_c \cdot F_c} \cdot \cos^2(\alpha)$$

$$N_2 = \frac{P \cdot E_a \cdot F_a \cdot \cos^2(\alpha)}{E_c \cdot F_c + 2 \cdot E_a \cdot F_a \cdot \cos^3(\alpha)}$$

En definitiva, el valor de N_2 será:

$$N_2 = \frac{P \cdot \cos^2(\alpha)}{\frac{E_c \cdot F_c}{E_a \cdot F_a} + 2 \cdot \cos^3(\alpha)} \quad (11)$$

Reemplazando por los respectivos valores en las expresiones (10) y (11), se obtiene los esfuerzos en las barras:

Barra vertical de cobre:

Reemplazando en (10):

$$N_1 = \frac{35}{1 + 2 \cdot \frac{(21 \cdot 10^3) \cdot 1,27}{(12 \cdot 10^3) \cdot 3,80} \cdot \cos^3(32^\circ)} = \frac{35}{1,7134}$$

$$N_1 = 20,43 \cdot kN \quad (\text{tracción})$$

Barras inclinadas de acero:

Reemplazando en (II):

$$N_2 = N_3 = \frac{35 \cdot \cos^2(32^\circ)}{\frac{(12 \cdot 10^3) \cdot 3,80}{(21 \cdot 10^3) \cdot 1,27} + 2 \cdot \cos^3(32^\circ)} = \frac{25,1715}{2,9296}$$

$$N_2 = N_3 = 8,59 \cdot kN \quad (\text{tracción})$$

2. Cálculo de las tensiones en las barras**Barra vertical de cobre:**

La tensión normal de tracción σ_c será:

$$\sigma_c = \frac{N_1}{F_c} = \frac{20,43}{3,80}$$

$$\sigma_c = 5,38 \cdot kN/cm^2 \quad (\text{tracción})$$

Barras inclinadas de acero:

La tensión normal de tracción σ_a en cada una de ellas será:

$$\sigma_a = \frac{N_2}{F_c} = \frac{8,59}{1,27}$$

$$\sigma_a = 6,76 \cdot kN/cm^2 \quad (\text{tracción})$$

3. Cálculo del corrimiento vertical del punto D

El corrimiento vertical del punto D está dada por la expresión:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot L_1}{E_c \cdot F_c}$$

$$\Delta l_1 = \frac{20,43 \cdot 145}{(12 \cdot 10^3) \cdot 3,80}$$

$$\Delta l_1 = 0,065 \cdot cm = 0,65 \cdot mm$$